



TITLE:

ノン・コンパクト空間上の位相不  
変量とアノマリー(素粒子論と物性  
論におけるトポロジーに関連する  
諸現象,研究会報告)

AUTHOR(S):

平山, 実

---

CITATION:

平山, 実. ノン・コンパクト空間上の位相不変量とアノマリー(素粒子論  
と物性論におけるトポロジーに関連する諸現象,研究会報告). 物性研究  
1987, 48(3): 191-193

ISSUE DATE:

1987-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92552>

RIGHT:

によって計量され、アノマリーがある場合には  $\Delta \neq 0$  となる。演算子の積に注意して評価してやると  $\Delta$  は、次のように与えられる。

$$\Delta = N_{+-} - N_{-+}$$

ここで  $N_{+-}$  ( $N_{-+}$ ) は外場によって真空状態に生成される粒子 (反粒子) の数である  $\Delta \neq 0$  となる場合には、この粒子・反粒子生成に非対称が存在しなくてはならない。S 行列のユニタリ性から有限自由度、或いはそれに準ずる系では  $\Delta = 0$  であり、 $\Delta \neq 0$  となるためには自由度無限大で、しかも赤外領域から紫外領域のすべてのエネルギー領域にある準位間で粒子状態の散乱が起きることが本質的である。Weyl 場の場合、紫外領域で準位間の遷移が外場の方向に応じて一定の方向に引き起こされ、これが平均として Dirac sea の面を押し上げたり引き下げたりする。その結果  $N_{+-}$ 、 $N_{-+}$  に非対称が生じ  $\Delta \neq 0$  となる。さらに  $\Delta$  の具体的な表式が、摂動計算等の従来の結果と一致することが示される。

詳しくは論文を参照下さい。

- 1) T. Fujiwara and Y. Ohnuki, Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 1182; Nagoya preprint, DPNU-86-50, and references cited therein.

## ノン・コンパクト空間上の位相不変量とアノマリー

富山大・理 平 山 実

要旨：ノン・コンパクト空間上の Dirac 演算子に関する位相不変量を考察する。連続スペクトルの存在に起因する複雑さ・多様さが現れる。コンパクト化可能な空間上の場の理論では見られなかった型のアノマリーが、ノン・コンパクト空間上の場の理論では現れることが指摘される。

### 1. 位相不変量

$n$  (偶数) 次元ユークリッド空間上の Dirac 演算子  $D$  を

$$D = i \Gamma_\mu \partial_\mu + K(x)$$

とする。 $K(x)$  は外場を含む行列関数で

$$K(x) = \begin{pmatrix} 0 & Q(x) \\ Q^\dagger(x) & 0 \end{pmatrix}$$

の形をとるものとする。 $\Gamma_\mu$  は定数行列で

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

をみたし

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ P_\mu^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

の形であるとする。

$$\Gamma_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\{D, \Gamma_{n+1}\} = 0$$

である。

$$V(\beta) = \text{Tr} [\Gamma_{n+1} k(\beta D^2)],$$

$$U(\beta) = \text{Tr} \{ i [\Gamma_{n+1} A, D] k(\beta D^2) \}$$

とおく。 $\beta$ は正のパラメタである。 $k(\beta D^2)$ は正則化因子で

$$k(0) = 1, \quad k(\infty) = k'(\infty) = \dots = 0$$

をみたすとする。定数行列  $A$  は

$$[\Gamma_{n+1} A, \Gamma_\mu] = 0$$

をみたすとする。このとき  $U(\beta)$  と  $U(\beta)$  は  $\beta$  に依存する位相不変量となる。例えば  $U(\beta)$  は

$$U(\beta) = \int_{\Sigma} dS_\mu \text{tr} \langle x | \Gamma_{n+1} A \Gamma_\mu k(\beta D^2) | x \rangle$$

のように無限遠面  $\Sigma$  上の積分で表わされるから、有限領域内で外場  $K(x)$  を変形させてもその値は不変に保たれる。 $\text{tr}$  は  $\Gamma$ -行列に関するトレースである。従来  $V(\beta)$  はしばしば考察されてきたが  $U(\beta)$  の存在は認識されていなかった。コンパクト空間の場合には  $V(\beta)$  は  $\beta$ -依存性を持たないのに対し、ノン・コンパクト空間上での  $V(\beta)$  は自明でない  $\beta$ -依存性を持つ。特に  $V(0)$  はアノマリーに関する量であり  $V(\infty)$  はフェルミオン・チャージに関する量であるが、これらは異なる値をとることになる。 $U(\beta)$  はコンパクト空間上では（境界効果がないとすれば）常にゼロとなってしまうが、ノン・コンパクト空間上では一般にゼロと異なる値をとる。 $U(0)$  がノン・コンパクト空間上の理論に特有のアノマリーを与えることになる。 $U(\beta)$  や  $dV(\beta)/d\beta$  がゼロでないことは  $\text{Tr}$  の循環性  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  が成立しないことを意味することを付記しておく。

## 2 アノマリー

$$L(x) = \phi^\dagger(x) D\phi(x)$$

なるラグランジアン密度で与えられる量子化された Dirac 場  $\phi(x)$  の理論を考える。  $G(x)$  を行列関数とし

$$J[x; G] = \phi^\dagger(x) \{G(x), D\} \phi(x),$$

$$J_\mu[x; G] = \phi^\dagger(x) i \Gamma_\mu G(x) \phi(x)$$

として、藤川の方法によって計算すれば

$$\langle \partial_\mu J_\mu[x; G] \rangle_0 = \langle J[x; G] \rangle_0 + A[x; G]$$

となる。右辺の  $A[x; G]$  がアノマリー項であり、

$$A[x; G] = \frac{2}{(2\pi)^n} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^n q \operatorname{tr} \{ G(x) \exp[-\beta(D - \not{q})^2] \}$$

で与えられる。結果は正則化因子  $k(\beta D^2)$  のとり方によらない。  $G$  を  $\Gamma_{n+1}$  や  $i[\Gamma_{n+1} A, D]$  のようにとればノン・トリビアルな  $A[x; G]$  が得られ、

$$\int d^n x A[x; \Gamma_{n+1}] = 2V(0),$$

$$\int d^n x A[x; i[\Gamma_{n+1} A, D]] = 2U(0)$$

等となる。紙幅の関係で具体的なモデルについての計算は省略する。詳細については

- 1) M. Hirayama, Topological invariants for Dirac operators on open spaces, Phys. Rev. D33 (1986) 1079.
- 2) M. Hirayama and N. Sugimasa, Novel topological invariants and anomalies, Phys. Rev. D vol. 35, No. 2 (1987).

を参照されたい。

## Berry's Phase, Schwinger Term and Explicit Calculations in Two Dimensions

名大・理 細 野 忍

## § 1. 序

外部変数を持つ量子力学系の断熱過程には、一般に、変数空間のトポロジーに起因する Berry の位相<sup>1)</sup>